2025.03.12

금융으로 만나는 새로운 세상

IBKS QUANT Report

변.동.대

변동성, 고수익을 추구할 때 동반하는 대가

\- 복리의 마법을 지키는 정량적 프레임

QUANT
권 순 호
02) 6915-5667
snowkonn@ibks.com

IBK기업은행 금융그룹
IBK투자증권

CONTENTS

0. ① 돈을 잃지 마라, ② 1번을 절대 잊지 마라

변동성에 대한 이야기는 보통 지루하다. 투자자의 관심은 보통 수익의 극대화와 수익 확률을 끌어 올리는 것에 있고 이것이 바로 투자 수익에 직접적인 연관이 있다고 생각 하기 때문이다. 반면, 변동성에 관련한 이야기는 원칙과 준칙에 관련이 되어있는 경우가 많다. 그렇지만, 반드시 기억해야 할 것은 변동성이 커질 수록 재투자를 기반으로 한 장기 투자에서, 직접적으로 복리 수익에 악영향을 미치고 손실 확률을 크게 늘린 다는 것을 반드시 기억해야 한다.

역사적으로 가장 훌륭한 성과를 거둔 투자자 중 한명인 워렌 버핏이 말한 변동성(위험)에 관련 원칙을 되새겨 본다면, 변동성 관리가 얼마나 중요한지 느낄 수 있다.

Rule No.1: Never Lose Money

Rule No.2: Never Forget Rule No.1.

- Warren Buffett

버핏도 항상 돈을 버는 것은 아닌 것처럼, 본 보고서에서는 이 원칙은 위험(변동성)에 대해 고려할 필요성을 강조하는 의도로 받아들인다. 변동성이 큰 종목은 위험하기 때문에 무조건 피해야 한다는 의미가 아니라 실질적인 장기 복리 수익 극대화 측면에서 단발적으로 기대할 수 있는 수익이 크더라도 정량적 근거로 변동성 수준을 조절할 필요가 있다 것이다.

본 보고서 1장 에서는 국내 일반 투자자에게도 높아진 고수익, 고위험 자산 투자 환경 접근성을 짚고, 투자자를 이러한 환경으로 이끄는 행동경제학적인 특징 두가지를 소개한다. 2장은 위험 자산 투자에 있어서 레버리지 선택대한 정량적인 근거를 제시하고 실제 레버리지 ETF와의 성과 비교를 진행한다. 마지막으로, 3장에서 실제 국내 주식 지수에 대한 변동성, 그리고 변동성 팩터의 수익률과 변동성 특징을 분석하여 앞선 장들에서 제시한 정량적 프레임을 국내 증시 투자에 활용할 근거들을 제시한다.

레버리지 투자, 고위험 자산에 대한 투자 접근성이 늘어난 현 시점에서 본 보고서를 통해 실제 투자자가 기대하는 수익률에만 매몰되지 않고, 감당해야하는 위험 수준을 수익 극대화 측면에서 고려 할 수 있을 것으로 기대한다.

추가로, 부록에서는 학술적인 배경이 필요한 투자자를 위해 변동성과 레버리지에 관련한 연구 흐름과 내용을 간단히 제시하고 변동성으로 인한 장기 수익률 저해 효과를 나타내는 식에 대한 증명 과정을 기재하였다.

1. 높아진 고위험 자산 투자 접근성, 이로 이끄는 행동적 특징

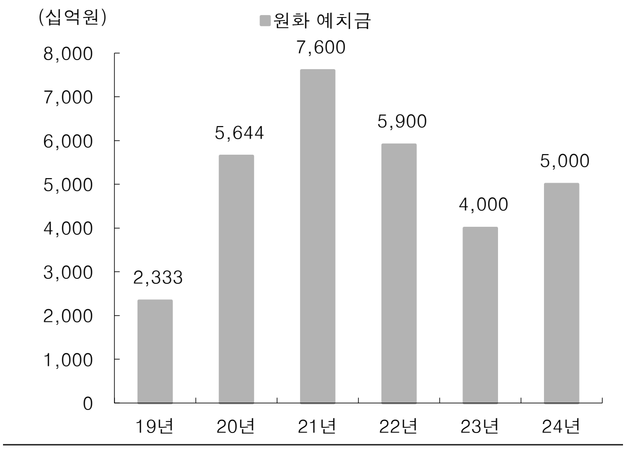
높아진 고위험 투자 자산 접근성

최근 몇 년간 투자자들에게 고위험 자산에 대한 접근성이 크게 졌다. 1) 가상화폐 시장의 급성장과 2) 해외 시장, 특히 다양한 ETF 상품에 투자할 수 있는 미국 증시로의 투자 확대가 주요한 요인이다. 이 두 가지는 높은 수익 가능성을 제시하지만, 동시에 투자자가 감당 해야할 변동성과 위험 수준도 함께 확대되었다.

2016년 이후 비트코인 급등으로 가상화폐 시장에 대한 투자자의 관심이 확대되었고 참여 투자자와 규모가 늘어나면서 21년 가상화폐 가격 강세와 함께 국내 가상화폐 거래소에 예치된 원화 규모는 7.6조원에 달했다. 22년 가격 조정 흐름 이후 예치금 규모가 24년 원화 예치금은 5조원 규모로 축소되었지만 여전히 국내 투자자에게 가상화폐 투자는 고위험, 고수익 투자 자산 중 하나로 자리잡고 있다.

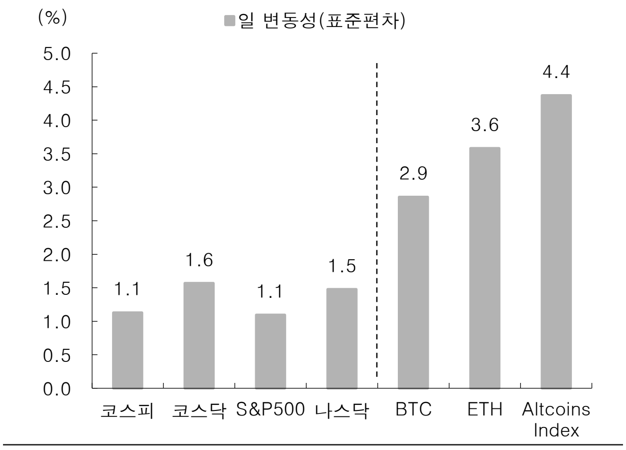
가상화폐 자산은 주식 시장에 비해 훨씬 큰 변동성을 특징으로 한다. 코스피 지수의 일별 변동성(표준편차) 1.1%에 비해 비트코인은 코스피 대비 2배 이상인 2.9% 에 달하며, 알트코인 인덱스의 일별 변동성은 코스피의 4배에 달하는 4.4%를 기록하고 있다.

그림 1. 코인 거래소 원화 예탁금 추이



자료: 언론보도 종합, 금융위원회, IBK투자증권
주: 금융위 가상자산 실태 조사 시작 시점인 21년 이전 값은 추정치 기재

그림 2. 주식대비 큰 변동성을 지니고 있는 코인 시장



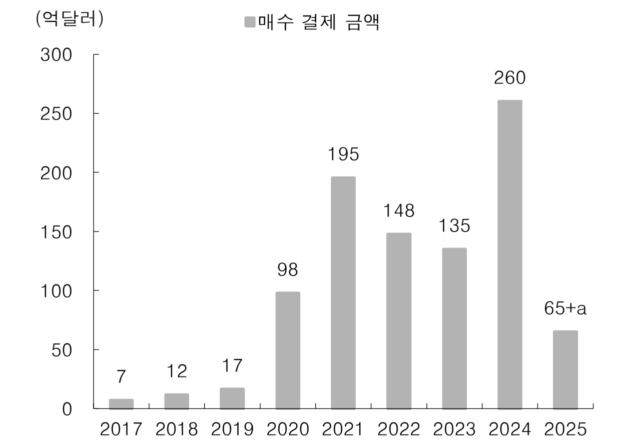
자료: Refinitiv, IBK투자증권
주: 22년 1월부터 25년 2월까지 일 단위 표준편차

2020년 이후 미국 시장으로의 투자 확대 역시 국내 투자자들에게 고위험, 고수익 기회를 제공하는 중요한 흐름으로 자리 잡고 있다. 최근 몇 년간 미국 주식 결제 금액이 가파르게 증가해 2024년에는 이 금액이 260억 달러에 달했다. 나아가, 단순히 미 증시의 개별 종목에 투자하는 것에 그치지 않고, 높은 수익을 기대할 수 있는 레버리지 ETF에 대한 매수 결제 금액이 국내 투자자의 전체 미국 주식 매수액의 40% 이상을 차지하고 있는 상황이다.

국내 투자자들의 미국 증시 참여가 확대와 함께, 단순 지수 추종 ETF를 넘어 개별 종목에 초점을 맞춘 레버리지 상품들도 빠르게 증가하고 있다. 미국 SEC가 2019년 9월 단일 종목 ETF에 대한 규제 완화를 담은 ETF Rule 6c-11 채택 이후, 2022년 8월 단일종목(테슬라)에 대한 레버리지/인버스 ETF가 미국 증시에 상장되었다. 이후 개별 종목의 레버리지 거래에 대한 수요와 함께 단일 종목 레버리지 ETF는 꾸준히 증가하면서 25년 1월 기준 레버리지 ETF의 AUM은 17.7억 달러에 달한다.

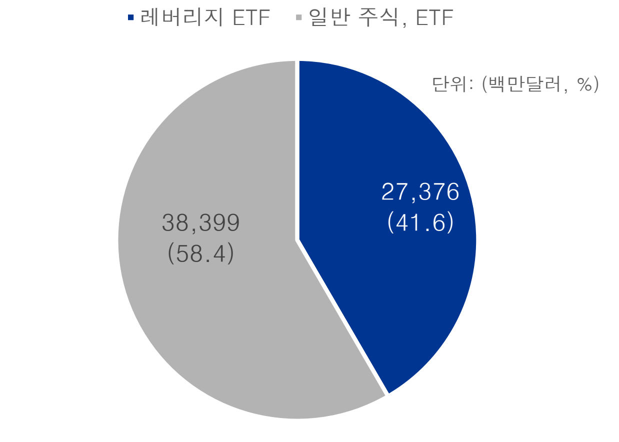
미국 증시를 통한 투자 자산 다각화와 중장기 투자 역시 존재하지만, 고위험 투자 특성상 단기 매수 거래 대금에서 레버리지 ETF의 비중이 크게 증가하고 있다. 레버리지 ETF를 활용하는 투자자들은 높은 기대 수익률을 추구하면서 동시에 그에 상응하는 높은 위험을 감수하는 전략을 취하고 있다. 가상화폐 시장이 보여준 바와 같이, 높은 변동성을 가진 자산들이 주요 투자 대상으로 부상하면서 해외 주식과 레버리지 ETF 역시 투자자들의 관심을 끌고 있다. 고위험 투자 환경에 대한 접근성이 커진 만큼 단기적 고수익 추구와 장기 복리 수익 극대화를 동시에 달성하기 위해서는 변동성에 대한 철저한 이해와 정량적 근거의 위험 수준 설정에 대한 필요성이 높아진 시점이라 판단한다.

그림 3. 국내 투자자들의 미국 주식 결제 금액 추이



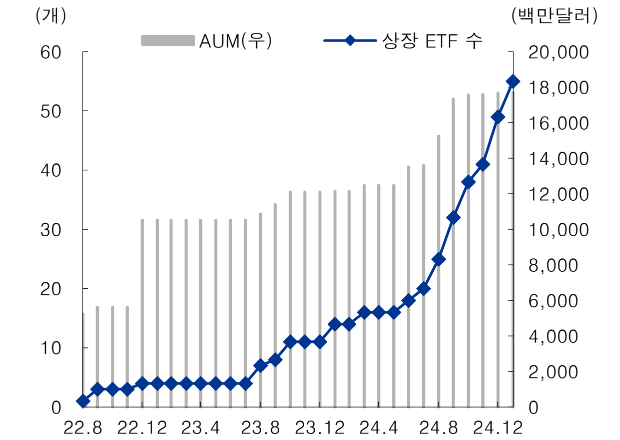
자료: 한국예탁결제원, IBK투자증권
주: 25년 매수 결제금액은 3월 4일 까지의 결제금액

그림 4. 미국 주식 매수 결제 금액 중 레버리지 ETF 비중



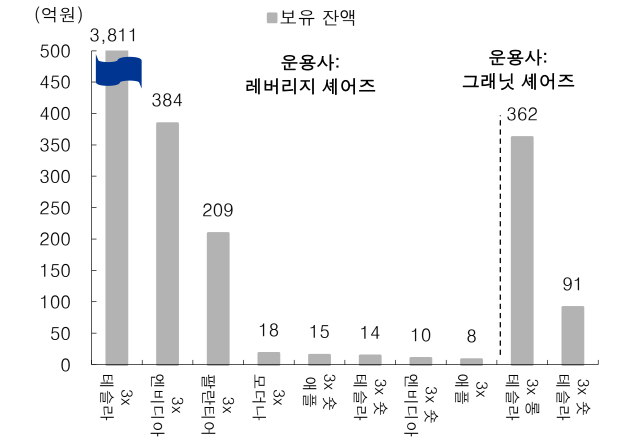
자료: 한국예탁결제원, IBK투자증권
주: 25년 3월 2일 기준 지난 3개월 미국 주식/ETF 매수 결제 금액 상위 50개 종목

그림 5. 미국 증시 단일종목, 가상화폐 레버리지 ETF 규모와 개수



자료: Refinitiv, IBK투자증권
주: AUM은 25년 3월 3일 규모 기준, 과거 상장 시점에 합산

그림 6. 개별 종목 3배 레버리지 ETF 국내 투자자 보유 금액



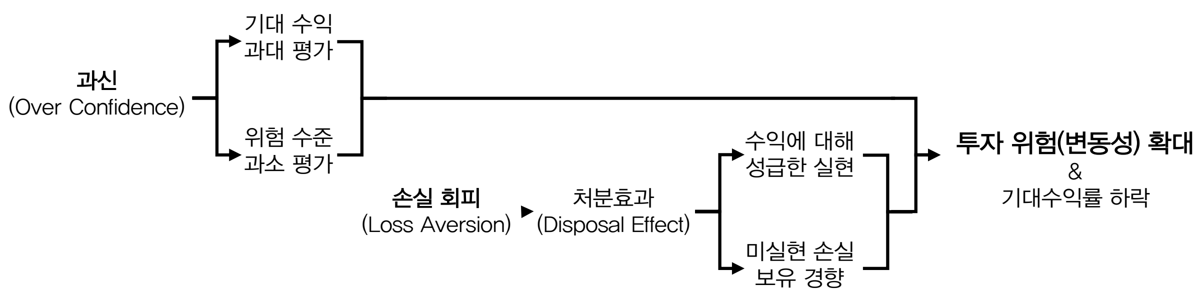
자료: 언론보도 참고, IBK투자증권
주: 25년 2월 7일 기준, 국내 대형 증권사 3사 보유 잔액 합산

고위험 환경에 투자자를 이끄는 행동경제학적 특징

이번 절에서는 고위험 투자 환경에서 투자자들이 장기 수익 극대화에 필요한 수준보다 과도한 변동성을 나타내게 하는 **두 가지 행동경제학적 특징**을 소개한다. 이 두 특징은 과신(Over Confidence)과 손실 회피(Loss Aversion)로, 이들이 결합될 때 투자자들은 장기 수익 극대화에 필요한 범위를 넘어선 변동성을 보이게 된다.

행동경제학적 특징이란 일반인이 합리적인 판단을 내리지 못하는 경향을 의미한다. 그러나 고전 경제학에서 가정하는 '합리성'은 일반인이 도달하기 어려운 이상적인 상태에 가깝다[1]. 효율적 시장 가설(EMH: Efficient Market Hypothesis)에서는 개별 투자자가 비합리적이라 하더라도, 그 효과가 시장 내에서 상쇄되어 자산 가격이 합리적으로 형성되고 모든 가용 정보를 신속하게 반영한다고 본다. 다만, 여러 행동경제학 연구에서는 사람들이 고전 경제학에서 가정하는 합리적 행동을 보이지 않으며, 그러한 행동들이 상쇄되지 않을 만큼 편향되어 가격의 비효율성이 나타난다고 주장한다.

그림 7. 행동 경제학적 특징이 고위험 투자로 이어지는 경로



자료: IBK투자증권

고위험 투자 환경과 관련하여 **과신(Over Confidence)**을 살펴보면, 투자자들은 실제 투자 환경보다 본인의 투자 행위로 인한 기대 수익을 과대평가하고, 노출되는 위험 수준을 과소평가하는 경향이 있다. 선행 연구(Kim & Nofsinger, 2008)에 따르면, 집단적 문화 특성이 강한 아시아권에서는 이러한 과신 편향이 더욱 두드러진다. 이로 인해 투자자들이 집단적으로 미국 증시에 몰리게 되면, 해당 자산의 기대 수익을 과대평가하거나 위험을 과소평가하는 현상이 나타날 수 있다.

두 번째 특징은 **손실 회피(Loss Aversion)** 성향이다. 고전 경제학에서 합리적인 투자

[1] 수학적으로 정의되는 '합리적 인간'의 대표적 조건 두 가지는 완비성(Completeness)과 이행성(Transitivity)이다. 완비성은 개인이 두 선택지 중 하나를 즉각적이고 명확하게 선호하거나 무차별하다고 판단할 수 있음을 의미하며, 이행성은 A가 B보다 낫고 B가 C보다 나을 때 반드시 A가 C보다 나아야 한다는 논리적 일관성을 요구한다. 그러나 현실에서는 이 두 조건이 일상적인 간단한 선택조차 어려운 경우가 많다. 예를 들어, 점심 메뉴를 결정하는 일상적인 상황에서도 사람들은 종종 완비성이나 이행성을 지키지 못한다. 이처럼 경제학에서 가정하는 '합리성'을 갖추기란 굉장히 어렵다.

자는 '위험 회피'적 성향을 가진다고 가정하는데, 여기서 위험(Risk)은 상승과 하락을 모두 포함한 변동성을 의미하는 반면, 행동경제학에서 말하는 **손실 회피(Loss Aversion)**는 실제로 수익률이 마이너스인 상태, 즉 손실 그 자체를 의미한다. 중요한 점은, 손실 회피 성향이 미실현 손실을 실현하지 않고 보유하는 행위와 미실현 이익을 빠르게 실현하는 처분효과(Disposition Effect)를 초래한다는 것이다. 이러한 처분효과가 나타나면, 투자자는 이익 실현 확률은 높아지지만 실현되는 수익 폭은 줄어들고, 손실 폭은 커져 결국 기대 수익이 낮아지고 위험은 증가하게 된다. 선행 연구(Frazzini, 2006)에서는 기관투자자를 포함한 시장 참여자들이 실제로 손실 회피 성향 때문에 처분효과를 보인다는 결과를 제시하고 있다.

또한, 2장에서 설명하겠지만, **과도한 위험을 동반하는 투자는 투자 횟수가 반복될수록 손실로 이어질 확률이 높다.** 위험한 투자를 통해 단기간에 큰 수익을 얻더라도, 과신과 손실 회피와 같은 행동경제학적 편향이 강화되지 않도록 주의해야 한다. 기존 투자 방식을 유지하면서 추가적인 투자 수익을 위해 정량적 근거에 기반한 변동성 관리가 필요한 것이다.

다음 장에서는 **투자 수익률이 정규분포를 따른다는 가정**하에, 변동성이 장기 기대 복리 수익률에 미치는 영향을 정량적으로 분석하고 구체적인 사례를 함께 제시할 것이다. 또한 장기 수익 극대화 및 손실 확률 최소화를 위한 최적 레버리지 선택 기준과 자산 및 전략 배분 문제를 다룬다.

2. 고변동성 환경에서 장기 복리 수익 추구를 위한 정량적 근거

이번 장에서는 장기적인 복리 수익률 관점에서 기하평균 수익률(복리 평균 수익률)이 산술평균 수익률(단리 평균 수익률)보다 항상 작거나 같다는 사실에서 출발한다. 두 평균의 관계는 산술-기하 평균 부등식으로 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad (\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}\ , when\ a = b)$$

관계는 항상 성립하지만, 실질적으로 중요한 점은 두 평균이 얼마나 큰 차이를 나타낼 수 있는가이다. 특히, 반복적인 재투자가 이루어지는 상황에서 변동성은 장기 복리 수익률(기하 평균)에 부정적 영향을 미친다. 동일한 산술 평균 수익률을 갖더라도 수익률 변동성이 큰 투자 전략은 장기적으로 기대되는 실제 성과(기하평균)가 현저히 낮아지게 된다.

먼저, 재투자가 이루어지는 위험 자산의 복리 기대 수익률이 다음과 같다는 사실을 기억하자.[2]

$$\textbf{위험 자산의 복리 기대 수익률} = \boldsymbol{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2}$$

μ: 1회 투자에 대한 기대 수익률(단리 기대 수익률)

σ^2: 자산 수익률의 변동성(분산)

변동성을 동반하는 위험 자산에서 변동성은 장기적으로 복리 수익률에 악영향을 끼친다. <u>투자 전략 방식에 대한 선택이나 투자 자산의 선택에서 변동성이 큰 것은 단순히 위험하다는 것뿐만 아니라 장기적으로 거둘 수 있는 수익에 악영향을 끼치는 것이다.</u>

간단한 투자 전략을 통해 알아보는 변동성의 복리 수익에 영향

이번 절에서는 단리 기대 수익과 복리 기대 수익의 차이를 간단한 투자 전략을 통해 알아본다. 홀짝 투자 전략이 다음과 같이 이루어진다고 가정한다. 홀짝 투자 전략이 있다고 할 때, 투자를 통해 이익을 얻을 확률이 p 이때 얻을 수 있는 수익률이 r_{gain}, 손실을 입을 확률이 $1-p$이고 이때 손실률을 r_{lose}라고 하면, 이 전략을 1회 실행했을 때 기대 수익률(단리)은 다음과 같다.

$$\mu := E(\text{전략 수익률}) = p \times r_{win} + (1-p) \times r_{lose}$$

[2] 로그 수익률이 정규 분포를 따른다고 가정할 때 성립한다. 도출 과정은 부록 [3. 정규분포 조건에서 기대 복리 수익률을 도출하는 두가지 방법] 참조

이제 두 가지 전략을 비교해 보자. 두 전략 모두 단리 기대 수익률(μ)이 1%로 동일하다.

전략 1) $r_{win} = 4\%, r_{lose} = -2\%,\ p = \frac{1}{2}$

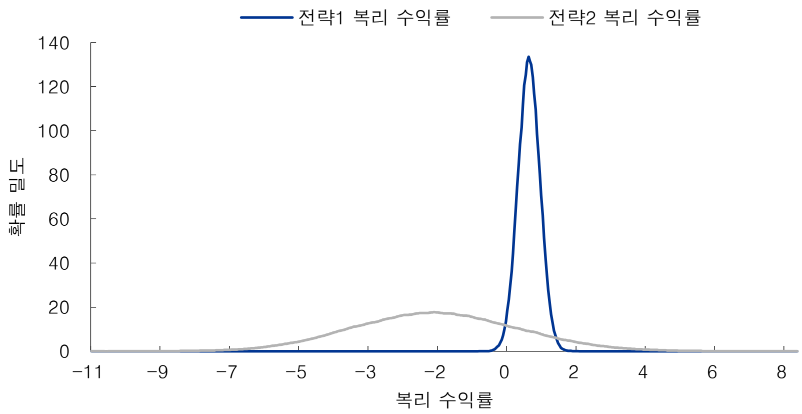
전략 2) $r_{win} = 24\%, r_{lose} = -22\%,\ p = \frac{1}{2}$

단일 투자 기회에서 기대 수익만 고려한다면 두 전략은 위험 중립적 투자자에게 동등한 선택지일 수 있다. 그러나 동일한 투자 기회가 반복되고 재투자가 이루어지는 상황에서는 변동성이 높은 전략2가 기대 복리 수익률이 현저히 낮다.

이를 보이기 위해 각각의 투자 전략이 100번 순차적으로 실행되고 재투자가 이루어진 상황을 시뮬레이션한 결과를 제시한다. 10만번의 시뮬레이션 결과를 통해 각 전략이 가질 수 있는 복리 수익의 특징을 짚는다.

이때 전략 1의 복리 수익률은 평균 0.96%을 기록한 반면 전략 2의 복리 수익률은 평균 −1.63%를 기록했다. 100회의 투자 시행 이후 **전략 1은 160% 수준의 수익을 기대할 수 있지만, 전략 2는 오히려 77%의 손실이 예상된다.**[3]

그림 8. 전략 1과 전략 2의 시뮬레이션에 대한 복리 수익률 분포



자료: IBK투자증권

표 1. 전략 1과 전략 2의 특징에 대한 통계치

	(단리) 수익률 (%, μ)	표준편차 (%, σ)	이론적 평균 복리 수익률	시뮬레이션 평균 복리 수익률	복리 수익률의 백분위 수				
					5th	25th	50th	75th	95th
전략 1	1.0	3.0	0.96	0.96	0.48	0.78	0.96	1.14	1.44
전략 2	1.0	23.0	−1.64	−1.63	−5.23	−3.01	−1.56	−0.28	2.06

자료: IBK투자증권
주: 백분위 수는 투자 시행 횟수가 늘어갈수록 평균으로 모이는 경향

[3] 전략 1: $(1 + 0.0096)^{100} - 1 \cong 1.6$, 전략 2 $(1 - 0.0163)^{100} - 1 \cong -0.77$

평균적인 수익률뿐만 아니라 수익을 올릴 확률 역시 변동성에 따라 큰 차이를 나타낸다. 각 전략의 복리 수익률 백분위 값을 비교하면, 전략 1은 대부분의 경우에서 안정적으로 수익을 기록하는 반면, 전략 2는 약 80%의 상황에서 손실을 기록한다. 전략 2가 가지는 유일한 장점은 극단적으로 큰 수익을 얻을 확률이 전략 1에 비해 높다는 것이지만, 이와 같은 장점에도 불구하고 투자가 반복적으로 진행될수록 전략 2는 장기적으로 손실을 기록할 확률이 더 높아진다.

이러한 결과를 다시 기대 복리 수익률 공식($\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$)에 비추어 보면, 시뮬레이션에서 얻은 평균 값과 매우 유사한 결과가 나타남을 알 수 있다. 전략의 변동성(분산)은 다음 식으로 계산할 수 있다.

$$\sigma^2 := \mathrm{Var}(\text{전략 수익률}) = \mathrm{p}(1-\mathrm{p})(\mathrm{r}_{\mathrm{win}} - r_{lose})^2$$

이를 통해 각 전략의 표준편차(σ)를 계산하면, 전략 1의 표준편차는 3%, 전략 2의 표준편차는 23%로 나타난다. 1%의 동일한 기대(단리) 수익률과 각 전략의 분산을 활용하여 이론적으로 계산한 기대 복리 수익률은 전략 1이 0.96%, 전략 2가 −1.64%이며, 이는 앞선 시뮬레이션 결과와 일치한다.

결론적으로, 시뮬레이션 결과에서 나타나듯 투자 전략을 수립할 때 기대 수익률(μ)과 수익 발생 확률(p)뿐 아니라 장기 수익의 극대화를 위해 반드시 변동성을 관리해야 한다. 투자 전략이나 자산 선택 시 과도한 변동성이 장기 수익률을 잠식하지 않도록 주의가 필요하다.

켈리 기준(Kelly Criterion)을 통한 레버리지 선택

앞선 장에서는 변동성이 장기 복리 수익률에 미치는 영향을 정량적으로 살펴보았다. 이번 장에서는 이러한 특성을 바탕으로 장기 복리 수익을 극대화하는 최적의 레버리지 비율을 구하고, 이를 실제 레버리지 ETF에 적용했을 때의 결과를 분석한다. 이를 통해 일별 기대 수익률이 동일하거나 증가하는 상황에서도 변동성의 증가로 인해 장기 복리 기대 수익률이 저하될 수 있음을 구체적으로 확인할 것이다.

레버리지 투자에서 장기 복리 수익을 극대화하기 위한 기준

최근 미국 증시의 투자 결제대금 중 약 40%가 레버리지 상품에 투입될 정도로 레버리지 투자의 비중이 높아졌다. 이러한 환경에서 투자자는 레버리지 배수를 어떻게 설정할지에 대한 명확한 기준을 필요로 한다. 이번 절에서는 최적 레버리지 선택의 정량적 기준으로 널리 활용되는 켈리 기준(Kelly Criterion)을 소개하고, 이를 이용한 최적의 레버리지 비율 선택 방법을 제시한다.

켈리 기준은 주어진 수익률과 변동성 조건 하에서 장기 복리 수익을 최대화할 수 있는 최적의 투자 비율을 제공하는 정량적 지표이다. 특히 켈리 기준을 이용해 레버리지 배수를 결정하면, 과도한 리스크로 인해 발생할 수 있는 복리 수익률 감소를 방지할 수 있다.

일반적으로, 기본 전략 S_1의 단리 수익률에 레버리지 배수 L을 곱한 레버리지 전략 S_L의 장기 기대 복리 수익률은 다음과 같이 표현된다.

$$\textbf{레버리지 전략의 기대 복리 수익률: } \boldsymbol{L\mu - \frac{1}{2}L^2\sigma^2}$$

여기서 주의할 점은, 레버리지를 통해 기대 수익률은 배수에 비례하여 선형적으로 증가하지만, 변동성의 증가는 배수의 제곱에 비례하여 복리 수익률에 더욱 큰 영향을 미친다는 것이다. 따라서 레버리지 배수가 일정 수준을 초과하면 오히려 장기 복리 수익률이 저하될 수 있다.

앞서 제시한 간단한 홀짝 투자 전략의 첫 번째 전략을 예로 들어 최적의 레버리지 배수를 계산해보자.

S_1(Base 전략): $r_{win} = 4\%, r_{lose} = -2\%,\ p = \frac{1}{2}$

S_L(레버리지 전략): $r_{win} = L \times 4\%, r_{lose} = L \times (-2\%),\ p = \frac{1}{2}$

이때 레버리지 전략이 가지는 기대 복리 수익률과 변동성(분산)은 다음과 같다.

$$\mu_L = E(L \times S_1) = L \times E(S_1) = L\mu_1$$

$$\sigma_L^2 = Var(L \times S_1) = L^2 Var(S_1) = L^2\sigma_1^2$$

이때, 기대 복리 수익을 극대화하는 레버리지 비율은 2차 함수의 최대값을 구하는 문제를 풀면 도출할 수 있다. 완전 제곱꼴 형태를 만들어 최대화 문제를 풀면 다음과 같다.

Let $f(L;\mu,\sigma^2) = \ L\mu - \frac{1}{2}L^2\sigma^2$

$$\max_L f(L;\mu,\sigma^2)$$

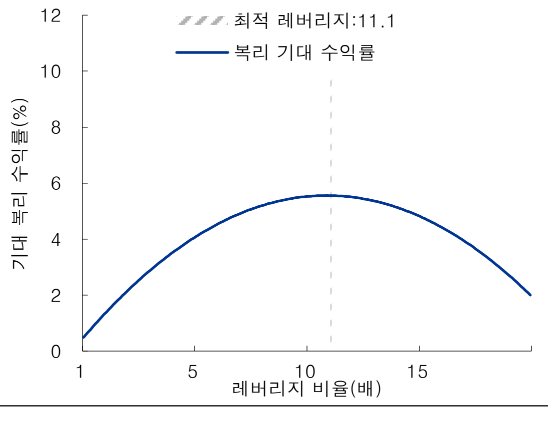
$$f(L;\mu,\sigma^2) = -\frac{1}{2}\sigma^2 L^2 + \mu L = -\frac{1}{2}\sigma^2\left(L^2 - \frac{2\mu}{\sigma^2}L\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sigma^2\left(L - \frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}$$

이에 따라 레버리지 비율이 $\frac{\mu}{\sigma^2}$일 때 복리 기대 수익률은 $\frac{\mu^2}{2\sigma^2}$로 최대값을 가지게 된다. 앞서 전략 1의 기대 수익률이 1% 이고 표준편차가 3%임을 확인했으므로 최대 복리 기대 수익 5.56%를 가지는 레버리지 L^*는 약 11.1배가 된다. 그러나 복리 기대 수익률을 극대화하기 위해 설정한 이 레버리지(Full Kelly)는 단일 투자에서의 변동성(표준편차)이 약 33.3%에 달하는 높은 수준이기 때문에, 위험 감수 수준을 고려해 더 낮은 레버리지 수준(Fractional Kelly)을 사용하는 것이 적합할 수 있다.

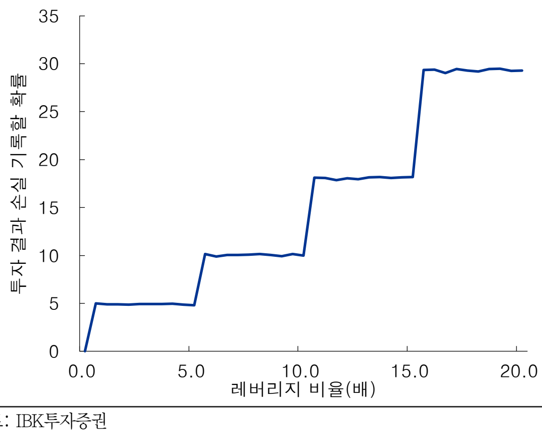
실제로 Full Kelly의 레버리지 비율은 일반적으로 변동성이 크고 손실을 경험할 가능성이 높아 투자자가 실제로 감수할 수 있는 수준을 초과하는 경우가 많다. 앞서 살펴본 전략 1에 레버리지를 적용할 경우, 복리 기대 수익을 극대화할 수는 있지만, 동시에 기존의 무레버리지 전략 대비 손실 발생 가능성이 증가하게 된다는 점을 반드시 기억해야 한다.

그림 9. 레버리지 수준에 따른 [전략 1]의 기대 복리 수익률



자료: IBK투자증권

그림 10. 레버리지에 따른 복리 수익률이 손실을 기록할 확률

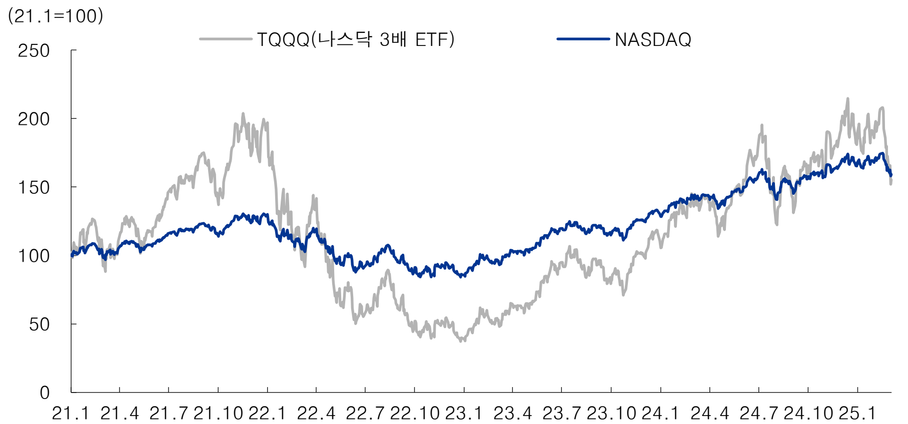


자료: IBK투자증권
주1) 레버리지 전략 30회 시행 및 재투자 진행, 10만회 시뮬레이션 결과
주2) 시행 횟수가 증가할수록 복리 수익이 가지는 s.e가 줄어들어 기대 복리 수익이 양의 값이면 손실 확률이 감소하고, 음의 값이면 손실확률이 증가함

레버리지 ETF는 수익 극대화에 효과적일까?

실제 나스닥 지수와 나스닥 3배 레버리지(TQQQ)와의 수익률 비교를 통해 본 보고서에서 설명하고 있는 식을 실제 환경에 적용해 보자. 분명히 3배 레버리지라고 설명을 했는데 왜 TQQQ는 나스닥 기초 지수를 하회할까? 그 이유는 투자기간 전체에 대한 레버리지 투자가 아니라 일 투자의 배수를 추종하는 ETF 상품이기 때문이다. 더불어 운용 보수와 트래킹 에러로 인해 일 평균 수익률도 나스닥 기초 지수의 3배에 미치지 못한다. 이로인해 일별 재투자가 자동적으로 이루어지는 상품에 투자하면서 변동성에 노출되어 수익이 낮아지고, 운용보수와 트래킹 에러로 인해 기대할 수 있는 수익은 더 낮아지게 된다.

그림 11. NASDAQ100지수와 TQQQ추이



자료: Refinitiv, IBK투자증권

표 2. $f(L;\mu,\sigma^2) =\ L\mu - 1/2\ L^2\sigma^2$를 활용한 TQQQ 평가

	일단위 표기				
	평균수익률 (μ, %)	변동성 (σ, %)	CGR (%)	추정 CGR[1] (%)	추정 CGR[2] (%)
나스닥100	0.055	1.43	0.044	0.044	–
TQQQ	0.130	4.19	0.042	0.072	0.042
	연율화 표기				
	평균수익률 (μ, %)	변동성 (σ, %)	CAGR (%)	추정 CAGR[1] (%)	추정 CAGR[2] (%)
나스닥100	13.7	22.6	11.8	11.8	–
TQQQ	32.8	66.6	11.1	19.9	11.3

자료: IBK투자증권
주1) 추정 CGR은 $L\mu - 1/2\ L^2\sigma^2$를 통해 산출
주2) 연율화는 수익률 μ 값에 252를 곱하고 σ값에 sqrt(252)를 곱함. CAGR은 $(1 + CGR)^{252} - 1$ 을 통해 산출
주3) 추정 CGR[1]은 기초자산 나스닥 100의 평균 수익률을 통해 산출, 추정 CGR[2]는 TQQQ의 평균 수익률을 통해 산출. 운용보수와 트래킹 에러로 인해 일변 수익의 세배를 그대로 추정하지 못하는 경우가 있는 것으로 추정

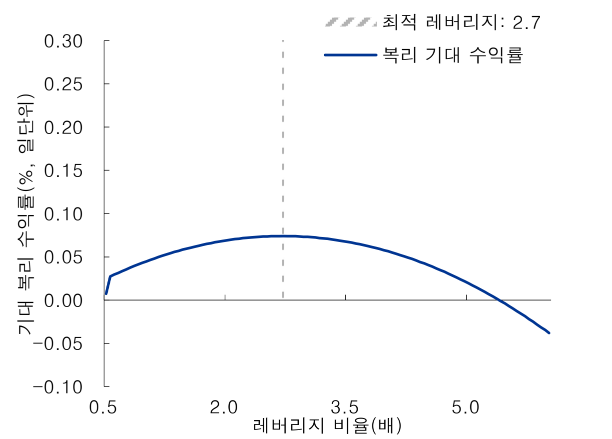
켈리 기준에서 보였던 $f(L;\mu,\sigma^2) = L\mu - 1/2\ L^2\sigma^2$ 식을 활용할 때, 나스닥100 지수의 수익률의 3배를 일별로 그대로 복사했다면 나타날 수 있는 수익은 더 컸다. 그렇지만, 운용보수와 트래킹 에러를 감안한 수익률을 μ 값으로 대체해 사용할 때, 실제로 나타난 수익률에 근사한 값을 가지게 된다. 투자자의 입장에서 고 레버리지 상품의 높은 회전율에 대한 거래비용까지 감안한다면, 마켓 타이밍의 승률이 높지 않은 상황에서 기초 지수에 대한 ETF를 투자하는 것 대비 수익률은 낮을 수밖에 없다.

나스닥 레버리지 ETF의 운용 비용을과 트래킹 에러가 일단위로 3.5bp(0.035%p) 발생한다고 가정한 후, 앞서 보였던 최적 레버리지 비율을 추정했던 것과 같은 방식으로 최적 레버리지 비율을 추정한다. 지난 3년가량의 일평균 수익률과 변동성을 기대수익률로 설정 할때, 나스닥 100의 최적의 레버리지 비율은 2.7로 추정된다.

다만, 25년 3월 높아진 미국 증시 변동성을 고려할 때, 정확한 마켓타이밍을 맞추지 않는 이상 레버리지 상품을 홀딩하는 기간이 길어질수록 변동성으로 인해 저해되는 복리 수익률의 폭은 더 커질 수 있다. 나스닥의 하락 추세가 반등의 추세로 바뀌어 지난 3년가량의 일평균 수익을 회복한다 하더라도, 높아진 변동성 수준으로 인해 레버리지 상품은 손실로 이어질 수 있는 것이다. VIX를 통해 현재 나스닥의 일단위 변동성을 추정한 값은 2.3% 수준[4]으로 μ를 앞서 사용한 과거 평균 수준을 가정하더라도 TQQQ는 손실을 기록할 가능성이 높다.

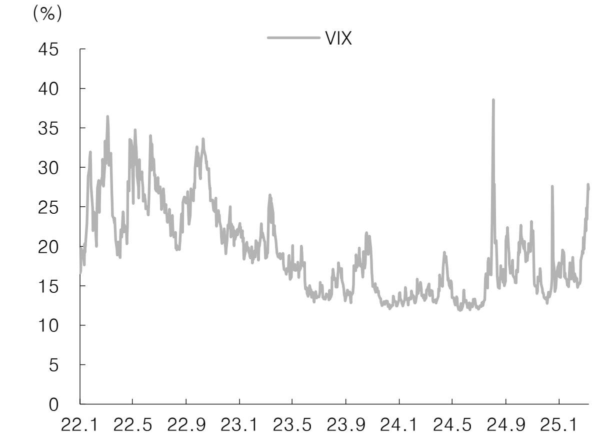
이처럼 변동성 효과로 인해 기초자산 상승이 기대되더라도 손실로 이어질 수 있는 상황이 존재한다. 결국, 투자에 있어서 상승 확률과 폭에 대한 근거를 가질 수 있는 상황에서 정량적인 근거로 변동성 수준을 조절해야, 수익으로 이어질 수 있는 레버리지 투자가 가능할 것이다.

그림 12. 역사적 일 수익률과 변동성 기반 TQQQ의 최적 레버리지 비율 추정



자료: IBK투자증권

그림 13. 높아진 변동성 환경에서는 더욱 보수적일 필요



자료: Bloomberg, IBK투자증권

4 VIX는 S&P500 지수를 기초자산으로 하는 옵션가격을 통해 산정한 연단위 변동성 추정 지수. 평균적으로 나스닥지수의 일 변동성(표준편차)이 S&P500대비 1.36배를 기록. 이를통해 현 VIX 수준 27.3을 환산해 추정

3. 국내 증시 변동성 관련 정보 프로파일링

앞서 장기 수익에서의 변동성의 영향을 강조한 것처럼, 국내 증시 투자자들에게도 증시와 종목들이 가지고 있는 변동성의 특징을 아는 것이 장기 수익을 내는데 중요할 수 있다. 이번 장에서는 코스피 지수와 관련된 변동성 특징, 그리고 수익률에 대한 흥미로운 결과들을 간단하게 제시하고, 변동성 팩터와 관련된 포트폴리오의 역사적 수익과 변동성에 대한 정보를 제공함으로써, 국내 증시 투자자가 고려할 수 있는 변동성에 관련된 사실들을 정량적으로 나타내고자 한다.

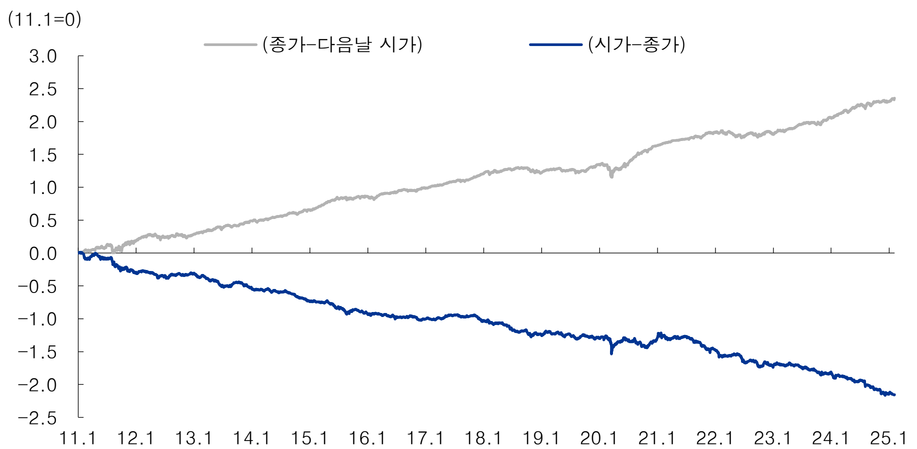
코스피 지수의 특징

코스피 지수의 특징을 {(일별), (장중), (장종료 후부터 다음날 시가)}까지로 나누어서 가지고 있는 특징들을 제시하고자 한다. 일별 특징을 살펴보기 이전에 가장 흥미로운 결과를 가지고 있는 **{(장중), (장종료 후부터 다음날 시가)}의 특징을 먼저 살펴본다.**

– {(장중), (장종료 후부터 다음날 시가)}의 특징

우리나라 산업과 경제 구조의 특성상 해외 이슈에 민감할 수밖에 없는 구조를 가지고 있으며 그 중에서도 미국 증시와 관련된 이슈들이 국내 증시에 큰 영향을 미친다. 이로인해서 우리나라의 (시가–종가) 수익률과 (종가–다음날 시가)의 평균적인 수익률에는 큰 차이가 나타난다. <u>미국 증시에 정보가 반영되는 시간대인 (종가– 다음날 시가)의 평균적인 수익률은 우리나라 장중 시간대인 (시가–종가) 시간대 대비 큰 수익률을 가진다.</u> 앞서 지속적으로 복리수익률에 관해 설명했으므로 누적 수익률을 로그 누적 수익률로 그리면 다음과 같다.

그림 14. 코스피 장중(시가–종가)과 오버나잇(종가–다음날 시가)의 누적 로그 수익률



자료: Refinitiv, IBK투자증권

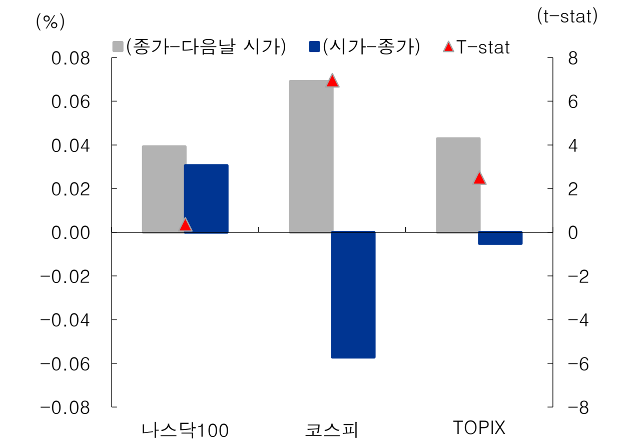
이렇게 두드러지는 현상이 15년간 지속적으로 나타나고 있다. 이러한 현상에 대한 선행 연구를 찾을 수는 없었지만 필자의 추정으로는 미국 증시에 대한 긍정적인 정보가 시가에 반영될 때, 과도한 반응(Over Reaction)으로 이어지는 것으로 추정한다. 이와는 대비 적으로 미국의 나스닥 지수에서는 장중과 오버나잇 수익률에 차이에 대한 유의성이 발견되지 않았다. 일본의 토픽스 지수도 오버나잇 수익률이 더 높은 경향이 있었으나 우리나라 대비 강하지 않았다. 이러한 현상들이 결국 우리나라의 경제 구조가 해외 이슈에 민감하고, 정보를 반영할 때 과도한 반응으로 이어진다는 판단이다.

코스피 지수가 전체 종목을 대변하는 것은 아니지만, 종목의 수익률이 시장 민감도가 높고(β) 시장 수익률로 인한 설명력이 높은 종목이라면 이러한 현상에 노출되었을 가능성이 높다. 관련 종목들에 대해서 롱 포지션을 짧은 기간으로 가져갔던 투자자들에게는 일중 거래(스캘핑) 대비 오버나잇 시장에 노출된 스윙 투자가 우위를 가졌을 것임을 추정해볼 수 있다.

코스피 200 지수에서도 동일한 현상이 나타나지만 몇 가지 유의할 것은 지수 ETF를 통해서 이러한 전략이 구현되지는 않는다는 것이다. 거래비용과 트래킹 에러를 고려했을 때 ETF를 통한 (종가-다음날 시가) 거래는 권장하지 않는다. 추가로 현재(3/12) 미국 증시가 큰 변동성에 노출되어 있고, 『[Market: Soon to Know] 코스피, 글로벌 증시 민감도 최저. 단기 낙폭은 제한적일 전망(1/13)』에서 밝힌 것처럼 미국 증시 움직임에 대한 방향 민감도가 크지 않은 시점에서 오버나잇 전략은 오히려 큰 변동성에 노출시킬 위험이 있다고 판단한다.

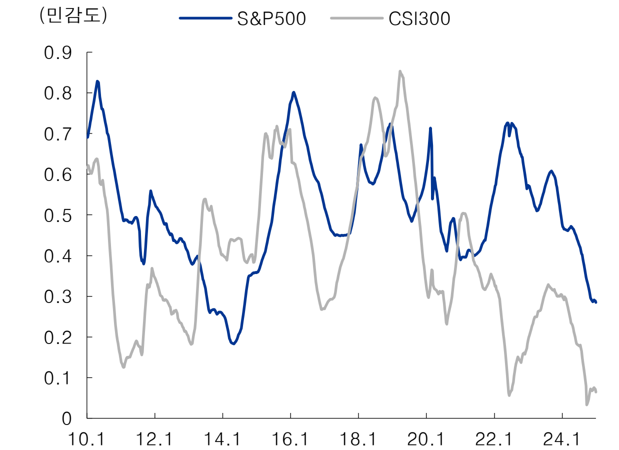
마지막으로, 해당 기간의 변동성은 (종가-다음날 시가) 에서는 0.69%, (시가-종가) 에서는 0.82%를 기록해 장중 거래가 낮은 역사적 평균 수익률에도 불구하고 더 큰 변동성을 지니는 것으로 나타났다.

그림 15. 국가별 장중, 오버나잇 평균 수익률과 차이에 대한 t-stat



자료: Refinitiv, IBK투자증권

그림 16. 미국, 중국 증시에 대한 민감도 흐름



자료: IBK투자증권
주: 코스피의 타 증시 민감도에 대한 상태 공간모형(State-Space Model)의 칼만 스무딩(Kalman-Smoothing) 값

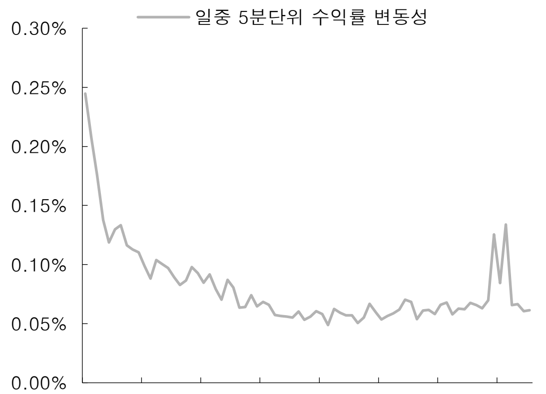
– 장중 코스피 변동의 특징

장중 5분단위의 기간에서 코스피 수익률은 시간대에 따른 다른 특징을 보인다. 장 개장 직후 코스피 지수는 높은 변동성을 보이다가 시간이 갈수록 변동성이 낮아지는 흐름을 보인다. 다만, 동시호가 30분 이전부터 재차 변동성이 상승하는 흐름을 보이다 동시호가에 진입하는 특징이 있다.

추가로, 시간대 별로 코스피 지수가 가지는 모멘텀 흐름이 있는지 살펴봤을 때 다른 시간대 대비 개장후 30분, 그리고 장종료 한시간 부근에서 다른 시간대 대비 높은 모멘텀 흐름을 보이는 것으로 확인되었다.

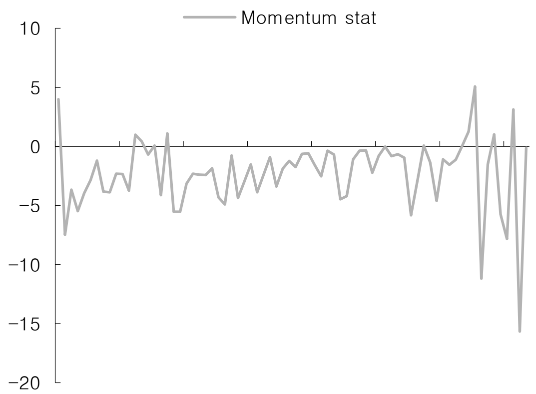
앞서 살펴본 대로 장중 기대할 수 있는 기대 수익은 낮고 시그널이 강하지 않지만, 지수 민감도가 높은 종목들에 대한 롱 포지션의 모멘텀 플레이는 해당 시간대에 진행하는 것이 유리할 수 있다.

그림 17. 코스피 인덱스의 일중 5분단위 변동성



자료: IBK투자증권
주: 동시호가 15:20 이전까지의 5분단위 수익률의 표 편차

그림 18. 코스피 인덱스의 30분단위 모멘텀 통계치



자료: IBK투자증권
주: 30분 수익률을 5분단위로 Rolling window 사용

– 일별 코스피 변동성 특징

코스피 변동성의 특징을 일별로 가지는 변동성은 서문에서 살펴봤던 것처럼 1.2%를 기록한다. 다만 현재와 같이 변동성이 커지는 시기와 그렇지 않은 시기로 나누어 볼 수 있는데. 경제학에서는 증시가 하락하는 시기에 변동성이 커지는 효과를 레버리지 효과(Leverage Effect)라고 부른다. 주가 하락으로 인해 자본(Equity)이 자산에서 차지하는 비중이 줄어들어 기업 재무구조에서 레버리지가 커지게 되고 이로 인해 자연스럽게 변동성이 커진다는 주장이다. 코스피의 일 평균 수익률과 변동성도 이러한 특징을 가지고 있다.

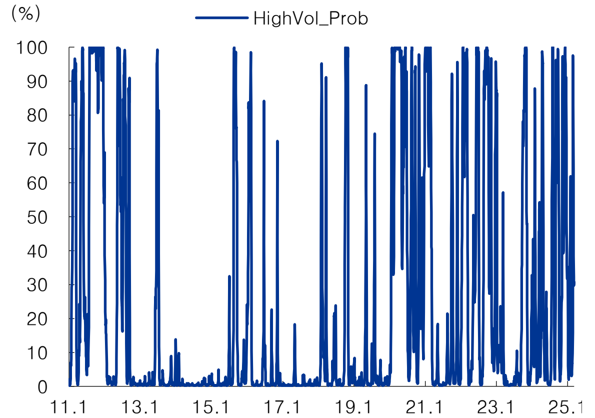
낮은 변동성 국면에서는 0.74%의 일별 변동성을 가지지만 국면 2에서는 1.73%의 일별 변동성을 가진다. 25년 2월 28일 코스피가 3%대 급락 하면서 높은 변동성 국면을 기록한 경험이 있다. 최근 3월 10일 미국 증시의 큰폭의 약세에도 불구하고 3월 11일 현재 우리나라 증시는 여전히 낮은 변동성 국면을 유지하고 있는 중이다.

표 3. 국면별 코스피 평균 수익률과 변동성

일 단위	평균 수익률 (μ, %)	변동성 (σ, %)	평균 수익률 t-stat	변동성 t-stat	국면 전환 확률 (%)	
국면1	0.05	0.74	2.93	23.04	97.9	2.1
국면2	-0.11	1.73	-1.58	12.12	7.4	92.6
연율화	평균 수익률 (μ, %)	변동성 (σ, %)	평균 수익률 t-stat	변동성 t-stat	국면 전환 확률 (%)	
국면1	12.6	11.76	2.93	23.04	97.9	2.1
국면2	-27.72	27.50	23.0	12.12	7.4	92.6

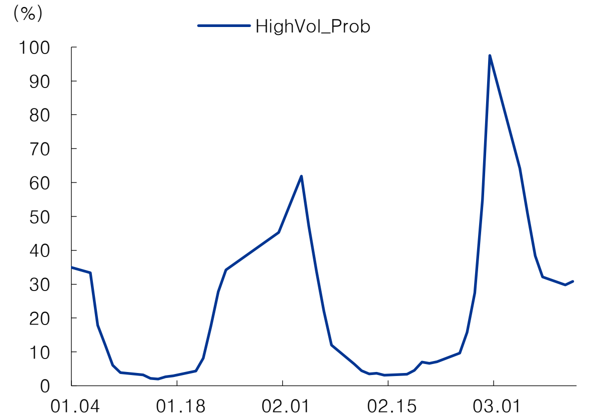
자료: IBK투자증권
주: Markov regime switching model 결과

그림 19. 높은 변동성 국면일 확률 추이



자료: IBK투자증권

그림 20. 25년 높은 변동성 국면일 확률 추이



자료: IBK투자증권

변동성 팩터의 특징

이번 절에서는 증시에 나타나는 변동성 팩터를 기준으로 국내 종목들의 포트폴리오가 어떤 특징을 가지는지 확인한다. 변동성 팩터는 다음 두가지 팩터를 기준으로 한다.

1) 60일 수익률 변동성(시장 민감도, 개별 변동성 포함)

2) 시장 변동성(52주 베타)

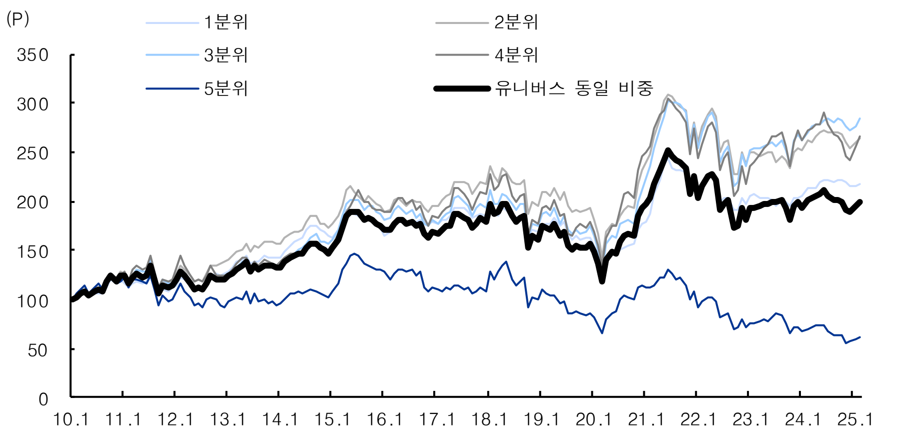
2010년 1월부터 2025년 2월까지 코스피 상장 종목 중 시가총액 상위 80%를 유니버스로 한다. 팩터 포트폴리오의 성과는 실제 거래를 위한 포트폴리오 보다 팩터의 성격을 파악하기위해 동일비중 포트폴리오로 설정 하였다. 시가총액 하위 20%를 유니버스에서 제외한 이유는 사이즈가 작은 주식들이 가지는 변동성과 수익 효과가 변동성 팩터의 성격과 혼합될 가능성이 크기 때문이다. 팩터포트폴리오는 5분위로 나누어 성과를 측정한다.

두가지 변동성 팩터 모두 가장 상위 분위(변동성이 높은 종목 포트폴리오)에서 가장 낮은 성과를 기록했다. 국내 증시에서도 높은 위험 수준에도 불구하고 저조한 성과를 기록하는 변동성 역설(Volatility Paradox) 현상이 나타난다. 이론적으로 높은 위험에 노출된 주식들이 더 높은 기대수익률을 가지지만 현실에서는 더 낮은 수익을 기록하는 것이다.

앞서 제시했던 변동성으로 인한 복리 수익 하락 효과, 그리고 높은 변동성을 가진 주식들의 성과가 좋지 않다는 것을 인지하고 투자 포트폴리오를 구성할 때 감당 할 수 있는 수준을 설정한다면, 더 크고 안정적인 수익을 얻을 수 있을 것으로 기대 한다.

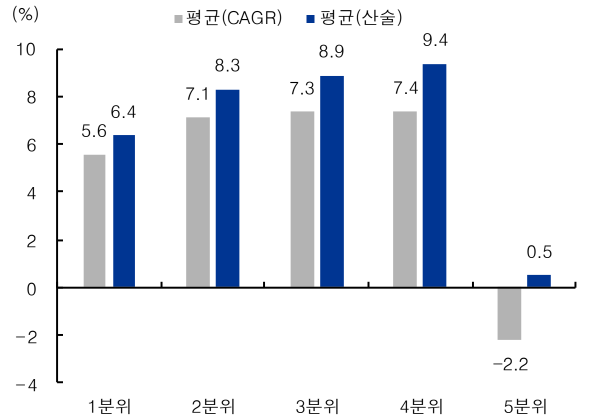
– 수익률 변동성 팩터 성과와 특징

그림 21. 수익률 변동성 팩터 분위별 누적 수익률



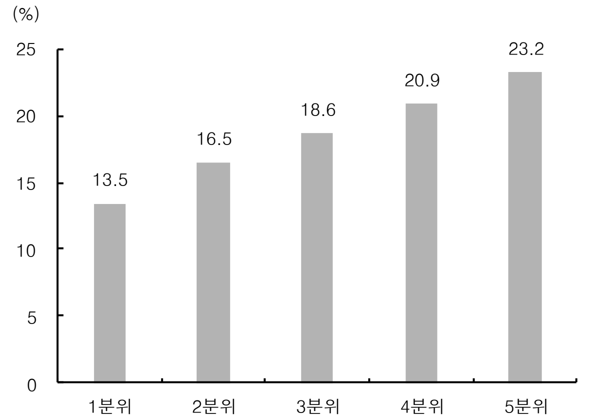
자료: IBK투자증권

그림 22. 수익률 변동성 팩터 평균 수익률



자료: IBK투자증권

그림 23. 수익률 변동성 팩터 변동성(표준편차)



자료: IBK투자증권

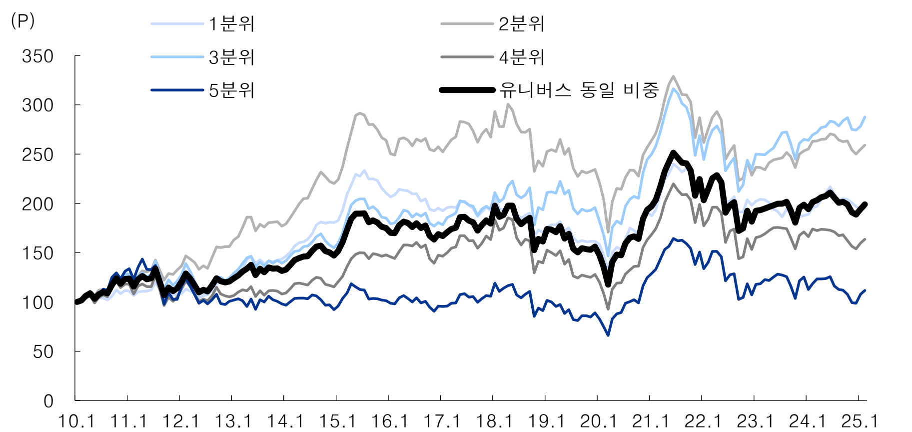
표 4. 수익률 변동성 팩터 평균 수익률

	1분위	2분위	3분위	4분위	5분위
평균(CAGR)	5.6	7.1	7.3	7.4	-2.2
평균(산술)	6.4	8.3	8.9	9.4	0.5
표준편차	13.5	16.5	18.6	20.9	23.2
샤프비율	0.47	0.50	0.48	0.45	0.02

자료: IBK투자증권

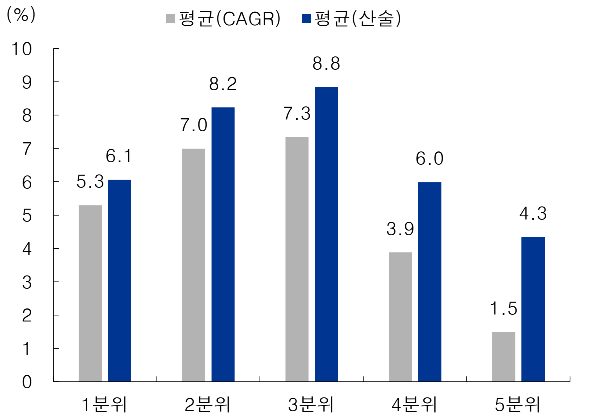
– 시장 민감도 팩터 성과와 특징

그림 24. 시장 민감도 팩터 분위별 누적 수익률



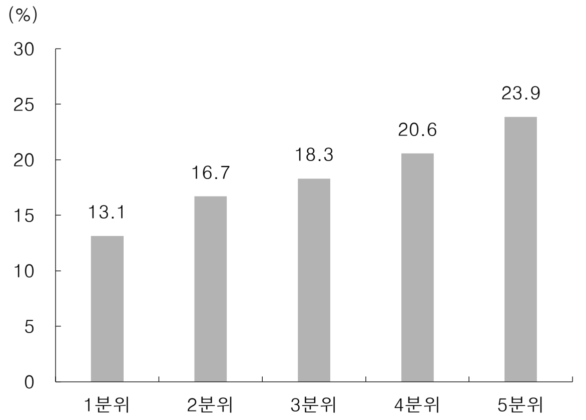
자료: IBK투자증권

그림 25. 시장 민감도(베타) 팩터 평균 수익률



자료: IBK투자증권

그림 26. 시장 민감도(베타) 팩터 변동성(표준편차)



자료: IBK투자증권

표 5. 시장 민감도(베타) 팩터 평균 수익률

	1분위	2분위	3분위	4분위	5분위
평균(CAGR, %)	5.3	7.0	7.3	3.9	1.5
평균(산술, %)	6.1	8.2	8.8	6.0	4.3
표준편차(%)	13.1	16.7	18.3	20.6	23.9
샤프비율	0.46	0.49	0.48	0.29	0.18

자료: IBK투자증권

부록

1. 변동성과 레버리지 투자: 이론적 배경과 선행 연구들

투자에서 변동성은 복리 수익률에 부정적인 영향을 미치며, 특히 레버리지 전략을 활용할 경우 그 영향이 더욱 커진다. 따라서 변동성을 효과적으로 관리하고, 최적의 레버리지 비중을 설정하는 것이 장기적인 투자 성과를 결정짓는 중요한 요소이다. 본문에서 제시하는 변동성 관리 및 최적 레버리지 전략 수립에 대한 논의를 뒷받침하기 위해, 본 장에서는 변동성과 복리 수익률의 관계, 변동성 드래그 효과, 최적 투자 비중 설정을 위한 켈리 기준, 그리고 분산 투자와 레버리지 포트폴리오의 관계를 다룬 주요 연구들을 정리한다. 이를 통해, 본 보고서에 대한 이론적 기반과 연구 흐름을 제공하고자 한다.

1) 어빙 피셔와 기하수익률

어빙 피셔(Irving Fisher)의 1930년 저서 "The Theory of Interest"는 현대 금융 이론의 토대를 마련한 획기적인 연구이다. 피셔는 이자율을 "현재 소비에 대한 미래 소비의 할인율"로 정의하며, 투자자의 시간선호(time preference)와 투자 기회 사이의 상호작용을 분석했다. 특히, 본문 내용과 관련하여 주목할 점은 피셔가 재투자를 통한 장기 부의 성장에서 산술평균이 아닌 기하평균의 중요성을 강조했다는 것이다. 그는 부의 성장률을 다음과 같은 방정식으로 표현한다:

$$1 + r_g = \sqrt{(1 + r_1)(1 + r_2) \cdots (1 + r_n)}$$

여기서 r_g는 기하평균 수익률이며, r_i는 각 기간별 수익률을 나타낸다. 피셔는 산술평균 수익률이 투자자의 단기적 기대치를 반영하는 반면, 실제 장기적 부의 성장은 기하평균에 의해 결정됨을 보였다. 이는 본문에서 언급된 "산술평균〉기하평균" 개념의 이론적 기반이 된다.

2) 켈리 기준(Kelly Criterion)과 최적의 투자 레버리지/비중 선택

최적 투자 비중 이론의 발전은 1956년 존 켈리(John Kelly Jr.)가 벨 연구소에서 발표한 "A New Interpretation of Information Rate"에서 시작되었다. 켈리는 정보이론과 통신 분야의 개념을 투자에 응용하여 장기적 자본 성장을 최대화하는 베팅 전략을 수학적으로 도출했다.

에드워드 O. 토프는 1969년 "Optimal Gambling Systems for Favorable Games"를 통해 켈리의 이론을 체계화하고 확장시켰다. 이 논문은 확률적으로 유리한 게임에서 최적 베팅 전략을 정립한 획기적인 연구였다. 또한 1967년 "Beat the Market"에서 이 원리를 주식시장에 적용하는 방법을 제시했다. 수학적인 베이스와 함께 켈리 기준을 포함한 방법론들을 이용해 시장의 비효율성을 수익 극대화로 연결시키는 실증 내용들을 담았다. 1975년 "Portfolio Choice and the Kelly Criterion" 연구에서 켈리 기준을 현대 포트폴리오 이론과 연결하는 중요한 작업을 수행했다.

3) 변동성 드래그(Volatility)의 배경과 실증 적용

Becker(2012)의 논문 "The Variance Drain and Jensen's Inequality"에서는 제슨 부등식과 Holder's defect를 활용하여, 산술평균 수익률과 기하평균 수익률 간의 차이가 단순히 수익률 분산의 약 절반에 해당한다는 근사식을 엄밀하게 도출하였다. 이 연구는 별도의 분포 가정 없이 실제 수익률 데이터를 이용하여, 변동성이 복리 수익률에 미치는 영향을 수학적으로 정밀하게 분석한 점이 특징이다. 그 결과, 투자자가 장기적으로 재투자할 때 평균 수익률에서 기하수익률로 전환되는 과정에서 발생하는 '분산 소모' 효과가 단순한 통계적 산출 이상의 의미를 지니며, 실제 투자 성과에 중대한 영향을 미친다는 결론을 제시한다.

반면, Tom Messmore(1995)의 "Variance Drain" 논문은 투자 포트폴리오의 성과 분석에 초점을 맞추어, 변동성이 평균 수익률과 복리 수익률 간의 차이를 어떻게 발생시키는지를 실증적으로 고찰하였다. Messmore는 다양한 투자 시나리오를 통해, 수익률의 변동성이 커질수록 동일한 평균 수익률을 유지하더라도 복리 수익률이 현저하게 저하된다는 사실을 보여주었다. 이를 통해 변동성 드래그가 단순한 계산상의 차이가 아니라, 장기 투자에서 실제 자산 성장에 부정적인 영향을 미치는 중요한 위험 요인임을 명확하게 입증하였다.

이와 같이 두 연구는 모두 변동성 드래그 현상이 투자자들이 기대하는 수익률과 실제 복리 수익률 간의 간극을 설명하는 데 있어 핵심적인 역할을 한다. Becker의 이론적 분석과 Messmore의 실증적 검증은 변동성이 고수익을 추구할 때 동반되는 대가임을 학문적으로 뒷받침하며, 본 보고서에서 제시하는 투자 전략 및 위험 관리 방안의 이론적 근거로서 중요한 역할을 한다.

4) 포트폴리오에서의 레버리지 효과

Edward Qian(2012)의 연구는 분산 투자(diversification)가 포트폴리오 성과에 미치는 영향을 분석하고, 이를 활용한 레버리지 전략의 효과를 평가하는 데 중점을 두었다. 저자는 "Diversification Return" 개념을 정립하며, 정기적인 포트폴리오 리밸런싱이 자산 배분 효과를 극대화하는 중요한 기제임을 설명하였다. Qian은 정해진 가중치로 구성된 다자산 포트폴리오의 분산이 개별 자산의 분산의 단순 합보다 작아지며, 이로 인해 포트폴리오의 기하평균 수익률이 개별 자산들의 기하평균 수익률의 가중합보다 커질 수 있음을 수학적으로 도출하였다. 이는 Booth & Fama(1992), Willenbrock(2011)의 연구를 확장한 것으로, 분산투자가 투자자에게 추가적인 기대수익을 제공할 수 있다는 점을 실증적으로 입증하였다.

이 연구는 또한 레버리지 전략이 분산 효과에 미치는 영향을 고찰하였다. 일반적으로 비레버리지(long-only) 포트폴리오에서는 리밸런싱이 평균회귀(mean-reverting) 메커니즘을 따르지만, 레버리지 포트폴리오에서는 정반대로 추세추종(trend-following) 전략이 적용된다는 점을 강조하였다. 예를 들어, 비레버리지 50/50 포트폴리오에서는 상승한 자산을 일부 매도하고 하락한 자산을 매수하는 방식으로 리밸런싱이 진행되지만, 레버리지 포트폴리오에서는 수익이 발생할 경우 승자(winner)를 더

매수하고 패자(loser)를 더 매도해야 원래의 목표 비중을 유지할 수 있다. 따라서 레버리지를 활용하는 경우, 기존의 분산 효과가 오히려 감소하거나, 심한 경우에는 부정적인 효과(negative diversification return)를 초래할 가능성이 있음을 수학적으로 분석하였다.

이 논문의 결론은 레버리지를 활용한 투자에서 자산 간 상관관계(correlation)가 매우 중요한 변수임을 강조한다. 두 자산의 상관관계가 낮거나 음(−)의 값을 가질수록 분산 효과는 커지고, 레버리지로 인한 부정적 효과를 완화할 수 있다. 반면, 상관관계가 높을 경우, 리밸런싱 효과가 상쇄되거나 부정적 영향을 미칠 수 있으며, 이는 레버리지 리스크 파리티(Risk Parity) 전략을 설계할 때 고려해야 할 주요 요소임을 시사한다. 본 연구는 변동성이 높은 환경에서 투자자가 단순히 레버리지를 통해 수익을 극대화하려 하기보다는, 자산 간 분산 효과를 극대화하는 방식으로 포트폴리오를 구성해야 한다는 점을 강조하며, 실무적 활용 가능성을 제시한다.

2. 주식시장 수익률은 왜 정규분포를 따르지 않을까?

질문이 잘못된 것일 수 있다. 왜냐하면 금융, 경제뿐만 아니라 사회과학에서 나타나는 현상과 통계량은 정규분포를 따르지 않는 경향이 있기 때문이다. 그렇지만, 어떤 상황에서 정규분포라는 것이 나타나는지 이해한다면, 정규 분포가 나타나지 않는 것에 대한 특징을 파악할 수 있고, 이를 통해서 금융시장의 특성을 조금 더 깊게 이해할 수 있을 것이라 믿는다.

특정 조건을 만족했을 때[5], 특정 통계량(대표적으로, 평균)이 정규 분포를 따르게 된다는 것은 중심 극한 정리(CLT, Central Limit Theorem)[6]를 통해서 증명된다.

CLT에 수리적인 설명에 앞서 결론부터 말하면, 표본으로 주어진 개별 데이터들이 분포로 수렴하는 과정에서 아주 작은 영향만 끼칠 경우에만 특정 통계량이 정규 분포로 수렴하게 된다. 즉, 표본으로 뽑힌 확률 변수 특정 몇 가지가 분포를 좌우할 만큼 크지 않다는 것이고 표본 간의 관계가 분포를 형성하는 과정에 희석될 만큼만 반영된다는 것이다. 그러나 금융시장의 경우, 앞서 특정 통계량으로 표현한 것을 자산의 수익률로 치환해서 생각해보면, 자산의 수익률이 수많은 정보들을 반영할 때 1) 시기에 따라 2) 특정 요인들이 다른 어떤 요인들 보다도 큰 영향을 끼치기 때문이라고 할 수 있다. 주식시장을 움직이는 셀 수 없이 많은 요인들과 관계가 있지만 매일 시장을 움직이는 큰 요인은 시황 한 페이지로 정리할 수 있는 것처럼.

CLT가 성립하는 조건 중 통계량을 표본 평균이라 설정하고 표본은 각각 독립적이면서 동일한 분포에서 생성된다고(i.i.d) 가정하고 표본에 포함되는 확률 변수는 적률 생성함수(MGF, Moment Generate Function)을 가진다고 가정한다. CLT 설명 이전에 알고 있어야 하는 배경 지식은 다음과 같다.

1) 통계량(예시에서는 표본 평균)의 MGF가 정규분포의 MGF로 수렴하면, 해당 통계량의 분포는 정규분포라고 할 수 있다.

2) 표준 정규분포(평균이 0, 분산이 1인 정규분포)의 MGF는 다음과 같다.

$$M_Z(s) = \exp(\frac{s^2}{2})$$

위 두가지 정보를 이용해 CLT가 성립하는 과정을 살펴보면 다음과 같다.

표본으로 관측되는 확률변수 $X_1, X_2, \ldots, X_n$은 평균 μ와 분산 σ^2을 가지는 임의의 확률분포 F를 따른다.

$$X_i \sim^{i.i.d} F(\mu, \sigma^2)$$

---

[5] 가장 강한 조건인 i.i.d 부터 Mixing, Erdos-Kac condition 등 CLT가 성립하기 위한 조건들을 만족시킨 상황을 뜻한다. 평균에 대한 통계량이 CLT가 성립하지 않는 대표적 경우는 Brownian motion.

[6] 여담으로, Central의 뜻은 중간(Middle)의 뜻이 아니다. 통계학에서 가장 중요한(Most Important) 극한 정리라는 뜻에서 Central이 붙었다.

각 X_i의 적률생성함수(MGF) $M_X(s) = E(e^{sX_i})$가 존재한다고 가정한다.

각 확률변수를 표준화하여

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$

로 정의하면 Z_i의 평균은 0, 분산은 1이다. 이에 대한 표본평균은 다음과 같다.

$$\bar{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$$

정규분포로의 수렴을 증명하기 위해 다음과 같이 변형한다.

$$\sqrt{n}\ \bar{\mathrm{Z}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Z_i$$

각 Z_i의 MGF를 Z_i의 MGF를 $M_z(s) = E(e^{sZ_i})$라 하자.

이때 앞서 제시한 식 1)에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있으며,

$$M_Z(s) = \exp(\frac{s^2}{2})$$

이를 테일러 근사할 경우

$$M_Z(s) = 1 + \frac{s^2}{2} + o(s^2)$$

$o(s^2)$은 $\mathrm{s} \to 0$일 때 s^2보다 빠르게 0으로 수렴하는 항이라는 뜻이다.

다시 변형된 표본 통계량으로 표현하면,

$$M_{\sqrt{n}\bar{\mathrm{Z}}}(s) = \left[M_z\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \quad (\because Z_i\text{는 } i.i.d)$$

따라서,

$$M_{\sqrt{n}\bar{\mathrm{Z}}}(s) = \left(1 + \frac{s^2}{2n} + o(s^2)\right)^n$$

표본의 크기가 커질때($n \to \infty$),

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{s^2}{2n} + o(s^2)\right)^n = \exp(\frac{s^2}{2})$$

이는 정규분포의 $N(0,1)$ MGF와 일치하므로,

$$\sqrt{n}\ \bar{Z} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

이 증명 과정에서 주목할 것은 샘플의 평균에 대한 MGF가 정규분포의 MGF로 수렴할 수 있고, 이때 나머지 텀이 정규분포로 수렴하는데 영향을 미치지 않는다는 것이 중요하다. 주식 가격에 정보들이 반영되는 것이 정보의 크기가 가격에 일부 비율로 반영될 때 모든 정보들의 크기가 균질적이고 서로 관계가 크지 않을 때 정규분포로써 수익률이 나타날 수 있다. 앞서 서술했던 것처럼, 주식시장의 움직임을 지배하는 주요 요인은 항상 시간에 따라 달라지고 지배적인 영향력을 지니고 있을 때가 많다. 이 때문에 정규 분포가 나타나지 않다는다고 해석할 수 있다.

주식시장의 수익률은 정규분포를 따르지 않지만, 본문에 제시했던 것처럼 전략을 통한 수익과 손실 구조가 균질적이고 각 전략의 결과가 서로 관계가 없다면, 정규분포를 통한 장기 복리 수익 추정에 적합하다. 다만, 균질적이지 않은 수익 구조를 가진 전략과 자산에 투자를 한다면, 추정 에러가 클 수 있지만, 수익률 변동에 관한 고차 모먼트(왜도, 첨도) 혹은 변동에 관련된 다른 통계량(MAE 등)을 통해 장기 복리 수익을 추정해 볼 수도 있다.

3. 정규분포 조건에서 기대 복리 수익률을 도출하는 두가지 방법

이번 장에서 보일 것은 $\ln(1+r_t)$가 정규 분포를 따르고, 수익률의 산술평균인$E[r_t]$이 μ일 때, 기하평균으로 해석되는 $E[\ln(1+r_t)]$이 $\mu-\frac{1}{2}\sigma^2$값을 가진 다는 것을 보이는 것이다.

엄밀하게 따지면, 로그 노말 분포의 기댓값이 직접적으로 장기 복리 평균 수익률의 기댓값이라는데 하나의 논리적 연결고리가 더 필요하다. 정의상 로그 정규 분포의 기댓값은 확률밀도함수와 확률변수에 해당하는 ln(x)의 적분 값일 뿐이기 때문이다. 연결고리는 다음과 같다. <u>확률변수에 대한 샘플의 평균이 기댓값으로 수렴한다는 대수의 법칙(LLN, Law of Large Number)에 의해 로그 정규 분포의 기댓값을 복리 수익률의 기댓값이라고 받아들일 수 있다</u>.

$$\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)=\ln(1+r_t)$$

$$\ln(1+\text{기하평균 수익률})=\ln\left(\left(\prod_{t=1}^{n}(1+r_t)\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\ln(1+r_t)\ \xrightarrow[by\ LLN]{p}\ E(\ln(1+r_t))$$

로그 노말 분포를 따르는 수익률의 평균과 분산의 값은 다음 두가지 방법으로 도출할 수 있다.

1) Moment Generate Function을 활용한 도출 방법

산술 평균 수익률($E[r_t]$) 이 μ 이고, 로그 수익률이 다음과 같이 평균 $m(\neq\mu)$와 분산 σ^2를 가지는 정규 분포를 따른다고 가정. m을 구하면 기대 복리 수익을 구할 수 있다.

$$\ln(1+r_t)\sim N(m,\sigma^2)$$

정규 분포를 따르는 수익률 $\ln(1+r_t)$의 MGF(Moment Generate Function)은 다음과 같음

$Let\ \ X=\ln(1+r_t),$

$$M_X(s)=E[e^{sX}]=\exp(ms+\frac{1}{2}\sigma^2s^2)$$

$s=1$, 대입

$$M_X(1)=E[e^X]=E[1+r_t]=\exp(m+\frac{1}{2}\sigma^2)$$

산술평균 $E[r_t]=$ μ이므로

$$\mathrm{E}[1+\mathrm{r_t}]=1+\mu=\exp(m+\frac{1}{2}\sigma^2)$$

$$\ln(1+\mu) = \ln\left(\exp\left(\mathrm{m} + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right) = m + \frac{1}{2}\sigma^2$$

따라서, 기하평균 m은 다음과 같음

$$m = \log(1+\mu) - \frac{1}{2}\sigma^2 \approx \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$$

2) SDE를 활용한 도출 방법

투자한 자산 혹은 포트폴리오의 가치를 S_t라 하고 이것이 기하 브라운 운동을 따를 때, 확률 미분 방정식(SDE: Stochastic Differential Equation)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- μ는 자산의 산술 수익률(드리프트)
- σ는 변동성(표준편차)
- W_t는 표준 브라운 운동(위너 프로세스, Wiener Process)
  위너 프로세스의 차분 값은 시간 길이 비례한 분산을 가진 정규 분포를 따름 $(W_{t+\Delta t} - W_t \sim N(0, \Delta t))$

✓ Ito 보조 정리 활용

Ito 보조정리(Ito's Lemma):

임의의 함수 $f(S_t)$에 대해, 확률 미분 방정식이

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

를 따른다면, $\mathrm{X_t} = f(S_t)$에 대한 변화량 dX_t는 다음과 같이 주어진다

$$df(S_t) = f'(S_t)dS_t + \frac{1}{2}f''(S_t)(dS_t)^2$$

로그 수익률을 정의하는 함수 $f(S_t) = lnS_t$의 도함수는 다음과 같음

$$f'(S_t) = \frac{1}{S_t} \qquad f''(S_t) = -\frac{1}{S_t^2}$$

Ito 보조정리를 적용하면

$$dX_t = \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)(dS_t)^2$$

확률 미분 방정식에서 $(dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$이므로, 이를 대입하면

$$dX_t = \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

이를 정리하면,

$$dX_t = d(lnS_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t$$

✓ 수익률 기댓값 도출

$$E[d(lnS_t)] = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt, \qquad (\because W_{t+\Delta t} - W_t \sim N(0, \Delta t) \ \Rightarrow E(dW_t) = 0\ )$$

단위 시간 [t−1, t]에 대해 적분하면,

$$E[\ln(S_t)] - E[\ln(S_{t-1})] = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

$$E[\ln(S_t/S_{t-1})] = E[\ln(1 + r_t)] = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$$

참고문헌

Frazzini, A. (2006). The Disposition Effect and Underreaction to News. *The Journal of Finance*, 61(4), 2017–2046.

Kim, K. A., & Nofsinger, J. R. (2008). Behavioral finance in Asia. *Pacific–Basin Finance Journal*, 16(1), 1–7.

Kelly, J. L., Jr. (1956). A new interpretation of information rate. *The Bell System Technical Journal, 35*(4), 917–926.

Thorp, E. O. (1971). Portfolio choice and the Kelly criterion. *Business and Economics Statistics Section Proceedings of the American Statistical Association*, 599–619.

Fisher, I. (1930). *The theory of interest: As determined by impatience to spend income and opportunity to invest it.*

Becker, R. A. (2012). The variance drain and Jensen's inequality.

Messmore, T. E. (1995). Variance drain. *The Journal of Portfolio Management, 21*(4), 104–110.

IBKS Research Center

성명	직급	담당업종	전화	이메일
용대인	전무(부문장)	총괄	6915-5400	daeinyong@ibks.com
이승훈	상무대우(본부장)	인터넷/게임	6915-5680	dozed@ibks.com
투자분석부				
변준호	연구위원	Strategy	6915-5670	ymaezono@ibks.com
정용택	수석 Economist	Economy	6915-5701	ytjeong0815@ibks.com
김인식	연구위원	자산배분/ETF	6915-5472	kds4539@ibks.com
정형주	연구위원	채권/크레딧	6915-5654	hj.jeong@ibks.com
조경진	연구위원	해외주식	6815-5464	ckjins@ibks.com
권순호	연구원	Quant	6915-5667	snowkonn@ibks.com
기간산업분석부				
이동욱	연구위원	화학/정유	6915-5671	ttreestump@ibks.com
남성현	연구위원	유통·식자재/지주	6915-5672	rockrole@ibks.com
김유혁	연구위원	미디어/엔터	6915-5673	yuhyuk.kim@ibks.com
이현욱	연구원	자동차/2차전지	6915-5659	hwle1125@ibks.com
오지훈	연구원	조선/기계	6915-5662	jihoonoh@ibks.com
혁신기업분석부				
이건재	연구위원	소재·부품·장비/스몰캡	6915-5676	geonjaelee83@ibks.com
김운호	연구위원	IT/반도체/디스플레이	6915-5656	unokim88@ibks.com
김태현	연구위원	음식료/유틸리티	6915-5658	kith0923@ibks.com
정이수	연구위원	제약/바이오	6915-5677	ysjeong306@ibks.com
조정현	연구원	건설/부동산	6915-5660	controlh@ibks.com

“국민과 중소기업에 필요한 참 좋은 IBK투자증권”

IBK기업은행 금융그룹
IBK투자증권

서울특별시 영등포구 여의도동 국제금융로 6길 11
대표번호 02-6915-5000
고객지원부 1588-0030, 1544-0050

영업부	02) 6915-2626	IBK WM센터 대구	053) 752-3535
강남센터	02) 2051-5858	IBK WM센터 광주	062) 382-6611
강남역 금융센터	02) 532-0210	IBK WM센터 일산	031) 904-3450
분당센터	031) 705-3600	IBK WM센터 판교	031) 724-2630
IBK WM센터 역삼	02) 556-4999	IBK WM센터 평촌	031) 476-1020
IBK WM센터 목동	02) 2062-3002	IBK WM센터 천안	041) 569-8130
IBK WM센터 강남	02) 2057-9300	IBK WM센터 부산	051) 741-8810
IBK WM센터 한남동	02) 796-8500	IBK WM센터 창원	055) 282-1650
IBK WM센터 중계동	02) 948-0270	IBK WM센터 울산	052) 271-3050
IBK WM센터 반포자이	02) 3481-6900	IBK WM센터 시화공단	031) 498-7900
IBK WM센터 동부이촌동	02) 798-1030	IBK WM센터 남동산단	032) 822-6200